Юные таланты
Олимпиада Пермского государственного национального исследовательского университета

Физика 8 класс. Решения

12 ноября 2016 г.

1. Пустую бочку объёмом 100 л наполняют из двух шлангов. По первому поступает вода при температуре 10 °C со скоростью 2 л/мин. По второму - вода при температуре 80 °C со скоростью $0,5$ л/мин. За какое время наполнится бочка и какой будет температура воды? Потерями тепла и теплоёмкостью бочки пренебречь.

Решение. Обозначим величины, данные в задаче: $\mu_1 = 2$ л/мин, $\mu_2 = 0,5$ л/мин, $t_1 = 10$ °C, $t_2 = 80$ °C, $V = 100$ л.

Суммарный объём воды, поступающий в бочку за минуту: $\mu_1 + \mu_2$, тогда, для времени τ за которое наполнится бочка можно записать:

$$\tau = \frac{V}{\mu_1 + \mu_2} = 40 \text{ мин}$$

Пусть, удельная (по объёму) теплоёмкость воды равна c, а искомая температура - t. К тому моменту, когда бочка наполнится, в неё поступит $\mu_1\tau$ холодной и $\mu_2\tau$ горячей воды. Холодная вода в процессе теплообмена получит количество теплоты равное:

$$Q_1 = c\mu_1\tau(t - t_1) \tag{1}$$

А горячая вода отдаст количество теплоты равное:

$$Q_2 = c\mu_2\tau(t_2 - t) \tag{2}$$

Так как потери теплоты малы, то справедливо: $Q_1 = Q_2$, что с учётом (1) и (2) распишется как:

$$c\mu_1\tau(t - t_1) = c\mu_2\tau(t_2 - t)$$

Разделим обе части равенства на $c\tau > 0$ и раскроем скобки.

$$\mu_1 t - \mu_1 t_1 = \mu_2 t_2 - \mu_2 t$$

Выразим искомую температуру t.

$$t = \frac{\mu_2 t_2 + \mu_1 t_1}{\mu_1 + \mu_2} = 24 \text{ °C}$$

Ответ: бочка наполнится за 40 мин, температура воды будет 24 °C.

Критерии оценок.
Получено время $\tau = 40$ мин. - 3 балла.
Записано уравнение $c\mu_1\tau(t - t_1) = c\mu_2\tau(t_2 - t)$ - 3 балла.
Получена температура воды 24 °C - 4 балла.
Итого - 10 баллов.

2. Площади поршней гидравлического пресса равны 10 см^2 и 200 см^2 (рис. 1). На меньшем стоит груз массой 1 кг. С какой вертикальной силой F действуют на большо́й поршень, если он находится на 20 см ниже маленького? В качестве гидравлической жидкости используется вода, её плотность 1000 кг/м^3. Поршни считать тонкими и невесомыми, трением пренебречь, ускорение свободного падения принять равным 10 Н/кг

Решение. Обозначим величины, данные в задаче: $m = 1$ кг, $h = 20$ см $= 0,2$ м, $S_1 = 10$ см^2 $= 0,001$ м^2, $S_2 = 200$ см^2 $= 0,02$ м^2. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

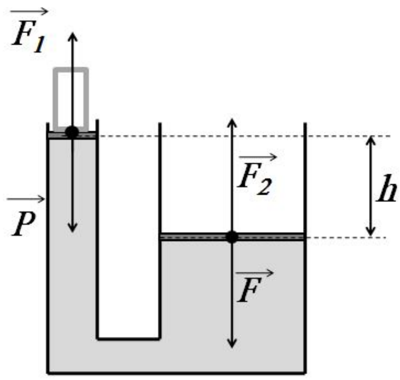


Рис. 1:

Условием равновесия системы будет равенство нулю равнодействующей всех сил, действующих на каждый поршень. На малый поршень действует вес груза $P = mg$, а так же сила давления жидкости под поршнем $F_1 = S_1 p$, где p - давление воды на уровне маленького поршня. В итоге:

$$mg = S_1 p \tag{1}$$

На большой поршень действует искомая сила F, а так же сила давления жидкости под поршнем $F_2 = S_2(p + \rho g h)$, где $\rho g h$ - добавочное давление столба жидкости под левым поршнем. В итоге:

$$F = S_2(p + \rho g h) \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) составим систему:

$$\begin{cases} mg = S_1 p \\ F = S_2 p + S_2 \rho g h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{mg}{S_1} \\ F = S_2 p + S_2 \rho g h \end{cases} \Rightarrow F = g\big(m \cdot \frac{S_2}{S_1} + S_2 \rho h\big)$$

При подстановке числовых значений в решение системы получаем $F = 240$ Н.

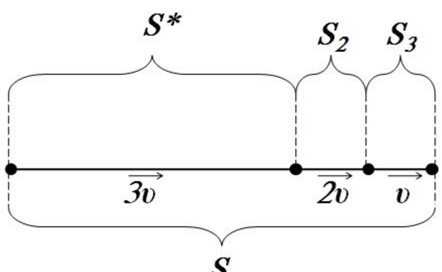
Ответ: 240 Н

Критерии оценок.

Выполнен рисунок с указанием всех сил - 3 балла.
Записаны условия равновесия (1) и (2) - 2 балла.
Составлена и решена система уравнений - 5 баллов.
Итого - 10 баллов.

3. Первую половину всего времени велосипедист двигался со скоростью $3v$. Затем, половину *оставшегося пути* со скоростью $2v$ и последний отрезок пути со скоростью v. Найти среднюю скорость велосипедиста на второй половине всего путешествия.

Решение. Обозначим весь путь, пройденный волосипедистом за S, а полное время движения за τ. Выполним рисунок с указанием скоростей и расстояний (рис. 2). Пусть путь, пройденный за первую половину времени путешествия, равен $S*$. Так как это расстояние было пройденно на скорости $3v$, то его можно расписать как:



$$S* = 3\upsilon \cdot \frac{\tau}{2} = \frac{3}{2}\upsilon\tau \qquad (1)$$

В итоге, за вторую половину времени велосипедист проедет расстояние - $S - S*$. Разобъём его на два равных по длине отрезка пути S_2 и S_3, на которых скорость велосипедиста равнялась 2υ и υ соответственно. Найдем время, которое затратил велосипедист, на преодоление каждого отрезка. Для S_2 имеем:

$$\tau_2 = \frac{S_2}{2\upsilon} \qquad (2)$$

Для S_3 аналогично получим:

$$\tau_3 = \frac{S_3}{\upsilon} \qquad (3)$$

Несложно понять, что за первую половину времени велосипедист проехал более половины пути, поэтому вычислим ту часть второй половины пути, на которой он двигался со скоростью 3υ.

$$S_1 = S * -\frac{S}{2}$$

А с учётом (1) имеем:

$$S_1 = \frac{3\upsilon\tau}{2} - \frac{S}{2} = \frac{3\upsilon\tau - S}{2}$$

На преодоление этого отрезка пути велосипедист затратил время равное:

$$\tau_1 = \frac{S_1}{3\upsilon} = \frac{\frac{3\upsilon\tau - S}{2}}{3\upsilon} = \frac{3\upsilon\tau - S}{6\upsilon} \qquad (4)$$

Средняя скорость, по определению, есть отношение всего пройденного пути, ко всему времени движения. Для средней скорости на второй половине пути в итоге получаем:

$$< \upsilon >= \frac{\frac{S}{2}}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3} = \frac{S}{2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)}$$

Что с учётом (2), (3) и (4) преобретает вид:

$$< \upsilon >= \frac{S}{2(\frac{3\upsilon\tau - S}{6\upsilon} + \frac{S_2}{2\upsilon} + \frac{S_3}{\upsilon})}$$

А с учётом того, что $S_2 = S_3 = \dfrac{S - S*}{2} = \dfrac{2S - 3\upsilon\tau}{4}$ имеем:

$$< \upsilon >= \frac{S}{2(\frac{3\upsilon\tau - S}{6\upsilon} + \frac{2S - 3\upsilon\tau}{8\upsilon} + \frac{2S - 3\upsilon\tau}{4\upsilon})}$$

Что после выполнения математических преобразований запишется как:

$$< \upsilon >= \frac{12S\upsilon}{14S - 15\upsilon\tau} \qquad (5)$$

Осталось лишь выразить S через $\upsilon\tau$. Для этого используем тот факт, что $\tau_2 + \tau_3 = \dfrac{\tau}{2}$. Из (2) и (3) имеем:

$$\frac{S_1}{2\upsilon}+\frac{S_2}{\upsilon}=\frac{S_1+2S_2}{2\upsilon}=\frac{\tau}{2}$$

Принимая во внимание соотношение $S_2=S_3=\dfrac{S-S*}{2}=\dfrac{2S-3\upsilon\tau}{4}$ получим:

$$\frac{\tau}{2}=\frac{3(\frac{2S-3\upsilon\tau}{4})}{2\upsilon}=\frac{6S-9\upsilon\tau}{8\upsilon}$$

Умножим обе части равенста на $8\upsilon>0$ и перегруппируем слагаемые.

$$6S=13\upsilon\tau$$

Откуда:

$$S=\frac{13\upsilon\tau}{6} \qquad (6)$$

Подставим (6) в формулу для средней скорости (5).

$$<\upsilon>=\frac{12\cdot\frac{13\upsilon\tau}{6}\cdot\upsilon}{14\cdot\frac{13\upsilon\tau}{6}-15\upsilon\tau}$$

Что после математических преобразований преобретает вид:

$$<\upsilon>=\frac{39\upsilon^2\tau}{23\upsilon\tau}=\frac{39}{23}\upsilon\approx 1,7\upsilon$$

Ответ: $<\upsilon>\approx 1,7\upsilon$

Критерии оценок.

Выполен рисунок с указанием скоростей и расстояний - 2 балла.
Выражены отрезки времени $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$ - 3 балла.
Получена формула (5) - 4 балла.
Получена формула (6) и окончательный ответ - 6 баллов.
Итого - 15 баллов.

4. Первоначально в калориметре находилась некая жидкость. В жидкость опускают металлический шарик. Известно, что удельная (по массе) теплоёмкость жидкости в 3 раза больше, а плотность в 7 раз меньше чем у шарика. Графики зависимости температуры шарика I и жидкости II от времени представлены на рисунке (рис. 3). Во сколько раз объём жидкости больше объёма шарика?

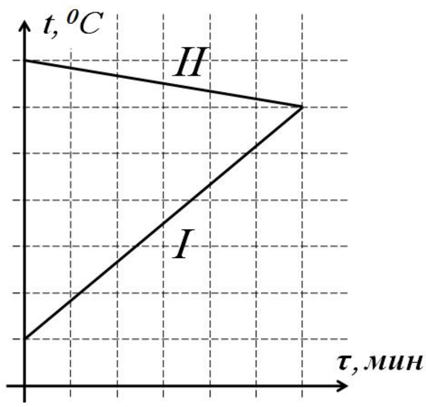


Рис. 3:

Решение. Пусть, удельная теплоёмкость металла из которого изготовлен шарик - c, а плотность жидкости ρ. Так же допустим, что температура жидкости в процессе теплообмена уменьшилась на Δt, тогда, согласно графику, температура шарика увеличилась на $5\Delta t$. Наконец, обозначим объём шарика за V, а объём жидкости за ηV, где η - искомое отношение объёмов.

В рамках обозначений, использованных выше, масса шарика будет представленна как: $7\rho V$, а теплота, которую он получил от жидкости распишется как:

$$Q_1 = c \cdot 7\rho V \cdot 5\Delta t = 35c\rho V\Delta t \tag{1}$$

Масса жидкости, в свою очередь, равна $\rho\eta V$, а теплота, которую она отдала металлу:

$$Q_2 = 3c \cdot \rho\eta V\Delta t = 3c\rho V\Delta t \cdot \eta \tag{2}$$

Если пренебречь потерями теплоты, то справедливо: $Q_1 = Q_2$, что с учётом (1) и (2) даёт уравнение для η:

$$35c\rho V\Delta t = 3c\rho V\Delta t \cdot \eta$$

Разделим обе части уравнения на $3c\rho V\Delta t > 0$, получим:

$$\eta = \frac{35}{3} \approx 11,7$$

Ответ: объём жидкости в $\approx 11,7$ раз больше объёма шарика.

Критерии оценок.
Записаны формулы (1) и (2) - 6 баллов.
Записано уравнение $35c\rho V\Delta t = 3c\rho V\Delta t \cdot \eta$ - 3 балла.
Получен окончательный ответ $\approx 11,7$ - 1 балл.
Итого - 10 баллов.